第2章 公开密钥密码学

南京大学计算机系黄皓教授

2010年10月11日

参考文献

1. Wenbo Mao(毛文波)，现代密码学理论与实践，电子工业出版社，2004年7月。
2. 周玉洁，冯登国，公开密钥密码算法及其快速实现，国防工业出版社，2002年9月。
3. Bruce Chneier, 应用密码学，机械工业出版社，2000年1月。

内容

1. 公开密钥密码体制的基本概念
2. RSA密码算法
3. 离散对数的基本概念
4. ElGamal密码算法
5. 椭圆曲线密码算法

1. 公开密钥密码体制的基本概念

公开密钥算法的特点

- 加密功能
  - $<K_U, K_R>$是一对密钥;
  - $E(K_U, M) = Y$
  - $E(K_R, Y)=M$,
  - $E(K_U, Y)\neq M$

    加密者不必保密K_U，接受者可以将自己的公钥公布在目录服务器上。

- 签名功能
  - $E(K_R, M) = Z$,
  - $E(K_U, Z)=M$,
  - 没有K_R寻找Y，使得$E(K_U, Y)=M$是计算不可能的。

单向陷门函数

- 对于每一个给定的k，f: x→f(k, x)是一一对应函数。
- 给定x和k，计算y=f(k,x)是容易的；
  反之，给定y和k，计算x是困难的问题。
- 存在陷门信息d(k)=k'及函数g(k',y)，当y=f(k,x)时，x=g(d(k), y)。
- 陷门信息d(k)使得计算f(k,x)的逆变得容易起来。
- 加密密钥k就不用保密了，甚至像电话本那样公布：
  - 给某人发一封密件，只要“密钥本”里面找到他的“加密密钥”，用它来加密文件就不用担心其他人窃取机密了。

2. 背包密码算法

M.E.Hellman, An Mathematics of Public-key Cryptography, Scientific American, v241, n8, Aug. 1979, pp146-157.

背包密码算法

- 给定$\{M_1, M_2, \ldots\ldots, M_n\}$和S，
- 求b_i, i=1,2, …, n， 满足:

$$S=b_1*M_1 + b_2*M_2+ \ldots\ldots+b_n*M_n$$

b_i=0或1， i=1,2, …, n

- 例: {1, 5, 6, 11, 14, 20}
  - 明文: 1 1 1 0 0 1
  - 背包: 1 5 6 11 14 20
  - 密文: 1+5+6+20=32

超递增背包

- {1，3，6，13，27，52}
  - 每一个数都比前面的数的总和大。超递增背包问题是容易问题
- 超递增背包问题是一个容易解的问题。

背包密码算法

- $\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$: 超递增

  $=\{1, 3, 6, 13, 27, 52\}$

  - N 与m_1, ,m_2, …, m_k互素。
  - $M > m_1+m_2+\ldots+m_k$
  - N与M互素
  - $m_1*N \bmod M = M_1$
  - $m_2*N \bmod M = M_2$

    ……
  - $m_k*N \bmod M = M_k$
  - $\{M_1, M_2, \ldots, M_k\}$: 是一般背包问题（难解的）。

背包密码算法

- 明文：$b_1\ b_2\ \ldots\ b_k$
- 密文：$b_1*M_1+\ldots+b_k*M_k$
- 解密
  - 求N'使的 $N*N' =1 \bmod M$ （有解，因为N与M互素。）
  - $(b_1*M_1+\ldots+b_k*M_k \bmod M)*N'$

  $= b_1*m_1*N*N'+\ldots+b_k*m_k*N*N' \bmod M$

  $= b_1*m_1+\ldots\ldots+b_k*m_k \bmod M$

  是易解的背包问题。
- 关键的陷门信息：N。

- 密码学家 Shamir 和 Zippel发现了变换中的缺陷，可以从普通的背包问题中重构出超递增背包问题。[W. Patarin, Mathematical Cryptography for Computer Scientists and Mathematicians, Totowa, N.J., Rowman & Littlefield, 1987.]

3. RSA公开密钥算法

素数

- 素数：只能被1和它本身整除的自然数；否则为合数。
- 每个合数都可以唯一地分解出素数因子
  - 6 = 2 ·3
  - 999999 = 3·3·3·7·11·13·37
  - 27641 = 131·121

    从2 开始试验每一个小于等于 $\sqrt{27641}$ 的素数。

素因子分解的速度

- 整数n的十进制位数因子分解的运算次数所需计算时间（每微秒一次）

50	1.4x1010	3.9小时
75	9.0x1012	104天
100	2.3x1015	74年
200	1.2x1023	3.8x109年
300	1.5x1029	4.0x1015年
500	1.3x1039	4.2x1025年

费马小定理

- 如果p是素数，a 与p互素，则

$$a^{p-1} = 1 \bmod p$$

如果$1 \le i < j \le p-1$，$i \cdot a \bmod p = j \cdot a \bmod p$ 则

存在$1 \le k \le p-1$，满足 $k \cdot a = 0 \bmod p \Rightarrow a \mid p$，得出矛盾。

{ a mod p, 2a mod p, …, (p-1)a mod p} 是{1,2, …, p-1}的一个排列。

(a mod p) (2a mod p) …[(p-1)a mod p] =(p-1)! mod p

a^{p-1} (p-1)!=(p-1)! mod p

$a^{p-1} = 1 \bmod p$

欧拉函数

- φ(n)：小于n，但与n互素的正整数的个数。
  - p是素数，则φ(p)=p-1。
  - p, q是素数，则φ(pq)=(p-1)(q-1)。

欧拉定理

欧拉定理： 如果a与n是互素的，则$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

- 如果a与n是互素，则 $a \bullet b = a \bullet c \pmod{n}$ 推出： $b = c \pmod{n}$
- 设$S=\{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{\phi(n)}\}$是所有小于n且与n是互素的整数的集合。
- 因为$a \bullet x_i = a \bullet x_j \pmod{n}$, 则有 $x_i = x_j \pmod{n}$,
- $\{a \bullet x_1 \pmod{n}, a \bullet x_2 \pmod{n}, \ldots\ldots, a \bullet x_{\phi(n)} \pmod{n}\} = S$

$$\prod_{i=1}^{\phi(n)} a \cdot x_i \pmod{n} = \prod_{i=1}^{\phi(n)} x_i \pmod{n}$$

$$a^{\phi(n)} \cdot \prod_{i=1}^{\phi(n)} x_i \pmod{n} = \prod_{i=1}^{\phi(n)} x_i \pmod{n}$$

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

RSA 公开密钥密码算法

- M是明文，n是一个大数
  - 加密：$C = M^e \bmod n$
  - 解密：$M = C^d \bmod n = M^{ed} \bmod n$

- 条件：
  - 能找到e,d,n使得对所有的M，当M<n时，

    $$M^{ed} = M \bmod n$$
  - 对所有的M，计算M^e 和C^d 的容易的。
  - 给定e、n，推导 d 是困难的。

RSA 公开密钥密码算法（续）

- p、q是素数　　秘密地选择
- n = p q，　　公开n
- 选择e: e与ϕ(n)是互素的;　　公开选择
- 计算d, 使得e• d=1 mod ϕ(n);　秘密地计算

即： e • d=1 +s•ϕ(n);

根据欧拉定理的推广

对于任意的m, 0 < m < n，

$$m^{ed} = m^{s\phi(n)+1} \equiv m \pmod{n}$$

欧拉定理的推广

- 如果p, q是素数，n=pq, 则

  对于任意的m, 0< m < n,

$$m^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$$

欧拉定理的推广

若n=pq是两个素数因子的乘积，X限制在加密与解密所要求的集合{0,1,…,n-1}之中，则对于任何明文X有$X^{m\phi(n)+1} \equiv X \pmod{n}$

证明：

- X=0的情况显然是成立的。
- 下面要证明X>0的情况也是成立的：
- 若X不是与n=pq互素的，则X必须包括p或者q作为一个因子。设p为X的因子，对于某些正整数c，有关系式X=cp。
- 由于X限于集合{0,1,…,n-1}之中，且n=pq，从而可知X必定是与q互素的，否则X将包含q作为一个因子，在这种情况下X将越出n-1。
- 由欧拉定理有$X^{\phi(q)} \equiv 1 \pmod{q}$，其中$\phi(q)=q-1$，
- 但$X^{m(p-1)\phi(q)} \equiv 1^{m(p-1)} \equiv 1 \pmod{q}$，对于任何整数m都成立，并且$(p-1)\phi(q)=(p-1)(q-1)=\phi(n)$，因此有$X^{m\phi(n)} \equiv 1 \pmod{q}$，或对于某些整数t，有
  $$1 = X^{m\phi(n)} + tq$$
- 用X=cp分别乘以等式的两端，得
- $$X = X^{m\phi(q)+1} + (tq)(cp)$$
- $$= X^{m\phi(q)+1} + tcn$$
- 因此 $$X^{m\phi(q)+1} \equiv X \pmod{n}$$
- 对于q为X的一个因子的情况，同理可证。

例

例:

- n=15, p=3, q=5, $\phi(n)=8$
- 生成密钥对：令e=3, 则d=3, ($d\ e = 1 \bmod \phi(n)$)
- 加密： 设M=7， $C=7^e \bmod n = 7^3 \bmod 15 = 13$
- 解密： $M= C^d \bmod n = 13^3 \bmod 15 = 7$

问题

- 如何计算 $m^e \bmod n$
- 如何判定一个给定的整数是素数?
- 如何找到足够大的素数p和q？

如何计算 $m^e \bmod n$

- $e = \sum_{bi \neq 0} 2^i$
- $m^e = m^{\sum_{bi \neq 0} 2^i} \bmod n$

$$= \prod_{bi \neq 0} m^{2^i} \bmod n$$

$$= \prod_{bi \neq 0} (m^{2^i} \bmod n)$$

```
d:=1;
for i=k downto 0
    d:=d*d mod n
    if b_i = 1 then
        d:=d*a mod n
return d
```

大素数生成— 素数的分布

- 存在无穷多个素数
  - 假设已知有k个素数$p_1, p_2, \ldots, p_k$;
  - 考虑 $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k + 1$
    - 要么存在 $p \mid n$，这时$p \neq p_1$， …， $p \neq p_k$
    - 要么n也是素数

大素数生成— 素数的分布

- 设x>0，记π(x)为不大于x的素数的个数，则：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x}=1$$

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x}$$

长度为t位的数共有2^t-2^{t-1}个，所以一个长度为t位的随机数为素数的概率为

$$\left(\frac{2^t}{\ln 2^t}-\frac{2^{t-1}}{\ln 2^{t-1}}\right)/(2^t-2^{t-1})=\frac{t-2}{(t-1)t\ln 2}$$

例如：一个长度为256位的随机数为素数的概率为

$$\frac{254}{255\times 256\times\ln 2}\approx 0.011$$

基于费马小定理的素性检测

I. 随机选取一个奇数n

II. 随机选取一个整数a, a<n

III. $a^{n-1} \neq 1 \bmod n$， 则n不是素数，转I

IV. 如果多次通过检测就接受n是素数，否则转II。

其它素性检测算法

- Solovay-Strassen算法
- Miller-Rabin算法
- Mesenne算法
- 基于椭圆曲线的素性检测

- 裴定一，祝跃飞，算法数论，科学出版社，2002年9月第一版。
- 周玉洁，冯登国，公开密钥密码算法及其快速实现，国防工业出版社，2002年9月

大素数生成—Solovay-Strassen素性检测

设 n 是一个大于2的奇数

(1) 随机均匀地选取 $a \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$

(2) 计算 $\gcd(a, n)$

(3) 如果 $\gcd(a, n) \neq 1$，则 n 不是素数

(4) 计算 $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv a^{(n-1)/2} \bmod n$，其中 $\left(\frac{a}{n}\right)$ 是 *Jacobi* 符号

(5) 如果 $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv a^{(n-1)/2} \bmod n$，则 n 可能是素数，否则 n 不是素数。

- 随机生成一个奇数n>2
- 随机均匀地选取序列$a_1, a_2, \ldots, a_k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$，对n进行k次素性测试，
- 如果每次输出都是“n可能是素数”，则n是合数的概率小于$1/2^k$。

RSA 参数的选择

- 模数 n 的选择
  - p, q 的差 | p-q | 必须很大。
    - $n=p \cdot q = [(p+q)/2]^2 - [(p-q)/2]^2$
    - 如果p-q很小，则$n \approx [(p+q)/2]^2$
    - 逐个检查大于$n^{1/2}$的t, 看是否有t^2-n是一个平方数s^2。如果存在则$n=t^2-s^2 = (t+s)(t-s)$
  - p-1与 q-1 的最大公因子应很小
  - p, q 必须为强素数
- **赖溪松，韩亮，张真诚，计算机密码学及其应用，国防工业出版社，2001年7月。**

对RSA的攻击方法

1. 强力攻击（穷举法）：尝试所有可能的私有密钥
2. 因子分解方法
3. 时间性攻击：取决于解密算法的运算时间

Pollard p-1 算法（分解因子算法）

```
a=2;
for  j=2 to B   do a = a^j;
d = gcd( a-1, n)
if d>1 and d<n then
        return d
else
        return false;
```

- Douglas R. Stinson，密码学原理与实践，电子工业出版社，2003年2月。
- 周玉洁，冯登国，公开密钥密码算法及其快速实现，国防工业出版社，2002年9月。

其它因子分解算法

- 二次筛法(quadric sieve)

$$O(e^{(1+o(1))\sqrt{\ln n \ln\ln n}})$$

- 椭圆曲线分解算法(elliptic curve factoring)

$$O(e^{(1+o(1))\sqrt{2\ln n \ln\ln n}})$$

- 数域筛法(number field sieve)

$$O(e^{(1.92+o(1))(\ln n)^{1/3}(\ln\ln n)^{2/3}})$$

因子分解的一些事例

- 1985年用二次筛法分解了69位的十进制数$2^{251}-1$.
- 1989年Lenstra、Manasse利用二次筛法再大量的工作站上并行运算，分解了一个106位的十进制数
- 1994年Atkins等利用二次筛法分解了一个RSA-129的十进制数。

- RSA-130在1996年被利用数域筛法分解。
- RSA-140在1999年2月被利用数域筛法分解。
- RSA-155在1999年8月被利用数域筛法分解。

- 155位的十进制数大约十512位，因此512位的RSA不应该被认为是安全的。
- 推测：768位的模式将在2010年被分解，1024位的模数将在2018年被分解。

其它对RSA的攻击

- 选择密文攻击
- 对RSA公共模数的攻击
- 对RSA低加密指数的攻击
- 对RSA低解密密指数的攻击
- 对RSA的加密和签名的攻击

- 周玉洁，冯登国，公开密钥密码算法及其快速实现，国防工业出版社，2002年9月。

选择密文攻击

情况：Eve 在Alice的通信过程中进行窃听，设法成功选取了一个用Alice公钥加密的密文c。Eve想读出消息。

- e: 加密密钥，d: 解密密钥。
- $c=m^e \bmod n$, $m=c^d \bmod n$
- 已知c, 没有d， 求m，即求 $m = c^d \bmod n$
- 随机选取一个数r，r<n。
- $x= r^e \bmod n$ $r=x^d \bmod n$

- $y= x\ c \bmod n$ 选择的密文
- $t * r = 1 \bmod n$
- $u=y^d \bmod n$: 请Alice对y签名
- $t\ u \bmod n$ 解密服务

$=t\ y^d \bmod n$

$= t\ x^d\ c^d \bmod n$

$= c^d \bmod n$

$= m$

不能天真地对消息签名。

公共模数攻击

- m是明文消息，两个加密密钥是e1、e2，n是公共的模数，两个密文是

  $c1 = m^{e1} \bmod n$

  $c2 = m^{e2} \bmod n$

- 密码分析者知道n、e1、e2、c1、c2
- 如果e1、e2互素(一般情况下会如此)，则存在r、s满足 $r \cdot e1+s \cdot e2=1$ 。
- 不妨假定r<0, $c1 \cdot c1' = 1 \bmod n$,则
  - $(c1')^r \cdot c2^s \bmod n$
  - $= m^{r \cdot e1+s \cdot e2} \bmod n$
  - $= m \bmod n$
- 不要在一组用户之间共享n。

RSA 算法的原理

欧拉定理的推广：

若n=pq是两个素数因子的乘积，

M限制在加密与解密所要求的集合{0,1,…,n-1}之中，

则对于任何明文M和c，满足 $M^{c\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

互素定理：

如果e与$\phi(n)$互素，则c,d，使得 $e\,d + c\,\phi(n) = 1$，即

$$e\,d = 1 - c\,\phi(n)$$

$$e\,d = 1 \mod(\phi(n))$$

RSA 算法：

加密： $C = M^e \bmod n$

解密： $C^d = (M^e)^d \bmod n = M^{ed} \bmod n$

$= M\,M^{c\,\phi(n)} \bmod n = M \bmod n = M$

4. 离散对数的基本概念

离散对数

- 离散对数问题
  - 欧拉定理： 如果a与n是互素的则，$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$
  - 如果a与n是互素的则必存在$1 \le m \le n-1$ 使得$a^m \equiv 1 \pmod{n}$
  - 满足式子$a^m \equiv 1 \pmod{n}$ 的最小的整数m (可能$< \phi(n)$)称为a (mod n) 的阶
  - 例如
    - $7^1 \equiv 7 \pmod{19}$
    - $7^2 \equiv 11 \pmod{19}$
    - $7^3 \equiv 1 \pmod{19}$
    - **7 (mod 19) 阶为3 ($<\phi(19)=18$)**

素根

- 如果a (mod n) 的阶为n-1，则
  - a^1 (mod n)， a^2(mod n)，…， a^{n-1}(mod n) 互不相同，是1，2，n-1的一个排列。
  - 任意给定1≤x≤n-1，存在y,使得a^y=x(mod n)
  - **称a为(mod n) 的素根**
- 对于任意整数b和n 的素根a, 必存在i, 1≤i≤n-1，a^i=b(mod n) 指数i称为b以a (mod n)为底数的离散对数。
- 求离散对数的问题是一个非常困难的问题。

循环群的基本概念

- G是一个群，a∈G，e是G的单位元，则满足$a^i=e$的最小正整数i成为元素a的阶。如果这样的整数不存在，则称a为无限阶元素。
- 如果存在一个元素a∈G，对与任意一个元素b，都存在一个整数i，使得$b=a^i$，则G称为循环群，元素a称为G的一个生成元；G也称为由a生成的群，记为G=<a>，a称为群G的单位元的本原根。
- $Z_n=\{0, 1, \ldots, n-1\}$ 按照整数模n加法构成加法群，

  Z_n中与n互素的非0整数全体记为Z_n^*，

  显然按照模n乘法构成群，　$|Z_n^*|=\phi(n)$
- P为素数时，乘法群**Z_p^* 记为F_p**，$|F_p|=p-1$，F_p一定存在本原根。所以F_p一定循环群。
- 假设a是F_p的本原根，则F_p上的任何元素h,存在i，使得$h=a^i$。可以考虑F_p上的离散对数$\log_\alpha h$问题。

循环群上的离散对数

- 离散对数问题:
  - 假设$\alpha \in G$是循环群G的一个生成元，元素$\beta \in \langle \alpha \rangle$
  - **找一个唯一的整数s使得** $\beta = \alpha^s$
- **离散对数的蛮力算法**
  - **给定循环群G**、生成元α、**任意元素**β;
  - 分别对i=1，…，|G|, 检测$\alpha^i = \beta$是否成立;
- **蛮力法最多需要|G|次群运算。**

离散对数算法— Shanks算法

- 设循环群G的阶为n。
- m是正整数，满足n>m>1。
- 对于任意的t, $0 \le t < n$, $h = g^t$,我们有
- $t = qm + r$, $0 \le q \le [n/m]$, $0 \le r < m$
- $h = g^t = g^{qm+r} = g^{qm} g^r$
  $= (g^m)^q g^r$
- $h \cdot g^{-r} = (g^q)^m$

- 计算
  $L = \{ (g^m)^q,\ q=0,1,\ldots,[n/m] \}$
- 然后计算
  $h \cdot g^{-r},\ r=0,1,\ldots,m-1$
  - 找出哪一个出现在L表中，
  - 记录相应的q, r,
- $t=q \cdot m + r$ 就是需要的离散对数。
- 算法复杂度：O([n/m]+m)

Shanks算法是第一个达到求解离散对数一般算法的复杂度下界的确定性一般算法。

Diffie-Hellman问题

- 给定一个素数p，mod p的一个素根a,已知$\mathbf{a^x \pmod p}$, $\mathbf{a^y \pmod p}$ 求$\mathbf{a^{xy} \pmod p}$ 。
  - **求离散对数问题：由p， a^x，a求x。**
  - **计算$a^y \pmod p)^x = a^{xy} \pmod p$。**
- Diffie-Hellman密钥交换
- Diffie-Hellman问题的难度不超过离散对数的难度。

Diffie-Hellman密钥交换

- Alice选取一个大的随机数x，发送给Bob

$$X=g^x \bmod n$$

- Bob选取一个大的随机数y，发送给Alice

$$Y=g^y \bmod n$$

- Alice计算 $s=Y^x \bmod n$
- Bob计算 $t=X^y \bmod n$
- $s=t=g^{xy} \bmod n$

5. ElGamal密码算法

ElGamal 加密算法

- 生成密钥对
  - 生成一个大的随机素数p和整数mod p的乘法群Z_p^*的生成元α;
  - 选取一个随机整数s (1≤x≤p-2),计算$\beta = \alpha^s \pmod p$;
  - 公钥 = (p, α, β), 私钥 = s。
- 加密明文信息m
  - 选取一个随机整数k(1≤k≤p-2),
  - 计算$X=\alpha^k \pmod p$,$Y=m\,(\beta)^k \pmod p$
  - (X, Y)就是密文
- 解密
  - 计算X^{p-1-s}, $X^{p-1-s} \bmod p = X^{-s} \bmod p = \alpha^{-sk} \bmod p$
  - 计算$Y \cdot X^{-s} \pmod p$恢复m,
    $Y \cdot X^{-s} \pmod p = m\,(\alpha^s)^k \cdot \alpha^{-sk} \bmod p = m$
- 加密者用$(\alpha^s)^k$将明文隐藏起来，因为解密者知道s，所以可以从密文的一部分$X=\alpha^k$恢复$(\alpha^s)^k$，因而可以解密。

ElGamal 签名算法

- 生成密钥对
  - 生成一个大的随机素数p和整数mod p的乘法群Z_p^*的生成元α;
  - 选取一个随机整数s (1≤ s ≤p-2), 计算$\beta = \alpha^s \pmod p$;
  - 公钥(p, α, β), 私钥s。
- 对信息m签名
  - 选取一个随机整数 k (1≤k≤p-2)，计算$X=\alpha^k \bmod p$
  - 从方程 $m = (s \cdot X + k \cdot Y) \bmod (p-1)$ 中求解Y;
  - 签名为(X,Y);
- 验证签名
  - 验证等式: $\beta^X \cdot X^Y = \alpha^m \bmod p$
  - $(\alpha^s)^X \cdot (\alpha^k)^Y = \alpha^{s \cdot X + k \cdot Y} \bmod p$

    $= \alpha^{m + t \cdot (p-1)} \bmod p$

    $= \alpha^m \cdot \alpha^{t \cdot (p-1)} \bmod p$

    $= \alpha^m \bmod p$

6. 椭圆曲线密码算法

椭圆曲线密码体制

- 1985年，N. Koblitz和V. Miller分别独立提出了椭圆曲线密码体制(ECC)，其依据就是**定义在椭圆曲线点群上的离散对数问题的难解性**。

椭圆曲线

- 公元250，古希腊的Alexandia时代，出版了Diaphantus的巨作《Arithmatic》，共13卷。现保存的只有6卷。
- 书中考虑的主要问题是：有理多项式方程是否有有理解

$$f(x,y) \in \mathbf{Q}[x, y], \exists x,y \in \mathbf{Q}, \quad f(x,y) = 0$$

- 等价地（乘以所有有理参数的公分母）整系数多项式方程是否有整数解：

$$f(x,y) \in \mathbf{Z}[x, y], \exists x,y \in \mathbf{Z}, \quad f(x,y) = 0$$

椭圆曲线

- Weierstrass方程:

$$y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6 \qquad a_i \in K$$

光滑的Weierstrass曲线加上一个无穷远点θ，称为K上的椭圆曲线。

- 同样可以定义R、C、F_q上的椭圆曲线，如

$$\mathbf{E(K) = \{ (x, y) \in K^2 \mid y^2+a_1xy+a_3y=x^3+a_2x^2+a_4x+a_6 \} \cup \{\theta\}}$$

有关的基本概念

1. 无穷远元素（无穷远点，无穷远直线）
   a) 平面上任意两相异直线的位置关系有相交和平行两种。引入无穷远点，是两种不同关系统一。
   b) 平面上一组相互平行的直线，有公共的无穷远点。
   c) 平面上任何相交的两直线L1,L2有不同的无穷远点。
   d) 全体无穷远点构成一条无穷远直线。
2. **射影几何学-齐次坐标**
   a) 设在平面上已经建立了以O为原点的直角坐标系，(x，y)为一点p 的坐标。令$x=X/Z, y=Y/Z\ (Z\neq 0)$，则比值X:Y:Z完全确定p 的位置，（X, Y, Z)就叫做p的齐次坐标，当Z=1，则点$(x，y)$的齐次坐标为(x，y，0) 。
   b) 原点的齐次坐标显然可以写成(0，0，1)。
   c) 在$x=X/Z, y=Y/Z\ (Z\neq 0)$中，令$Z\rightarrow 0$，则$x\rightarrow\infty$，$y\rightarrow\infty$。因此可以用$(x, y，0)$表示无穷远点。

变量的相容性变换

- 若椭圆曲线的基础域**K的特征不等于2或3**，作相容性变换

$$(x,y)\rightarrow(\frac{x-3a_1^2-12a_2}{36},\ \frac{y-3a_1x}{216}-\frac{a_1^3+4a_1a_2-12a_3}{24})$$

把E变为曲线$y^2=x^3+ax+b$。判别式$\Delta=16(4a^3+27b^2)b$。

- 若椭圆曲线的基础域**K的特征等于2**
  - $a_1\neq 0$, 作相容性变换

$$(x,y)\rightarrow(a_1^2\ x+\frac{a_3}{a_1},\ a_1^3y+\frac{a_1^2a_4+a_3^2}{a_1^3})$$

把E变为曲线$y^2+xy=x^3+ax^2+b$。这样的曲线称为非超奇异的，判别式$\Delta=b$。

  - $a_1=0$，作相容性变换

$$(x,y)\rightarrow(x+a_2,\ y)$$

把E变为曲线$y^2+cy=x^3+ax+b$。这样的曲线称为超奇异的，判别式$\Delta=c^4$。

变量的相容性变换

- 若椭圆曲线的基础域**K的特征等于3**，
- $a_1^2 \neq a_2$，作相容性变换

$$(x, y) \to (x + \frac{d_4}{d_2},\ y + a_1 x + a_1 \frac{d_4}{d_2} + a_3)$$

$$其中 d_2 = a_1^2 + a_2,\ d_4 = a_4 - a_1 a_3$$

把E变为曲线$y^2=x^3+ax^2+b$,这样的曲线称为非超奇异的，判别式$\Delta=-a^3b$。

- $a_1^2=a_2$，作相容性变换

$$(x,y) \to (x,\ y+a_1x+a_3)$$

把E变为曲线$y^2=x^3+ax+b$,这样的曲线称为超奇异的，判别式$\Delta=-a^3$。

D. Hankeron, A. Menezes, S. Vanstone, 椭圆曲线密码学导论，电子工业出版社，2005年8月。

- 为什么把这样的曲线称为椭圆曲线？

椭圆曲线方程为：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

椭圆曲线与椭圆积分

- 形如$\int R(x,y)dx$的不定积分，其中y是x的代数函数，即满足代数方程$P(x,y)=0$，P是关于x和y的整多项式。这类积分成为阿贝尔（Abel）积分。

  为了纪念挪威天才数学家阿贝尔（N. H. Abel，1802－1829）诞辰200周年，挪威政府于2003年设立了一项数学奖——阿贝尔奖。这项每年颁发一次的奖项的奖金高达80万美元，相当于诺贝尔奖的奖金，是世界上奖金最高的数学奖。

- 不定积分$\int R(x, \sqrt{ax2+bx+c})dx$可以通过变量替换，变成有理函数的积分从而可以得到有限形式表达的原函数。

- 然而以下两类积分在一般情况下不能用初等函数表示原函数:

  $$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx$$

  $$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx$$

椭圆曲线与椭圆积分

$$\int R(x, \sqrt{ax^3+bx^2+cx+d})dx$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^4+bx^3+cx^2+dx+e})dx$$

- 上述的积分包含了4-5个参数，制作5个参数的积分表很困难，因此人们希望把这些积分化成几种参数尽可能少的形式。

$$\int \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$\int \frac{z^2dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad (0<k<1) \qquad \int \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi$$

$$\int \frac{dz}{(1+hz^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} \qquad \int \frac{d\varphi}{(1+h\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

- 上述的积分分别成为第一、二、三类**椭圆积分**。

椭圆曲线与椭圆积分

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的曲线长度可以表示成积分：

$$\int_0^{2\pi} a\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 t}\,dt \qquad (*)$$

其中$\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$,

椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$可以表示成参数方程：

$x=\varphi(t)=a\cdot\sin t,\quad y=\psi(t)=b\cos t$

曲线的长度可以用定积分$\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$计算.

- 上述的椭圆曲线的长度公式与前述的椭圆积分的标准形式相同，因此把椭圆积分中被积函数对应的有理函数方程表示的曲线称为椭圆曲线。
- Г. М. Фихтенгольц菲赫金哥尔兹，**微积分学教程**(二卷一分册)，人民教育出版社，1978年3月。第8章第5节。

实域R上椭圆曲线

- 考虑椭圆曲线:

$$y^2=x^3+ax+b$$

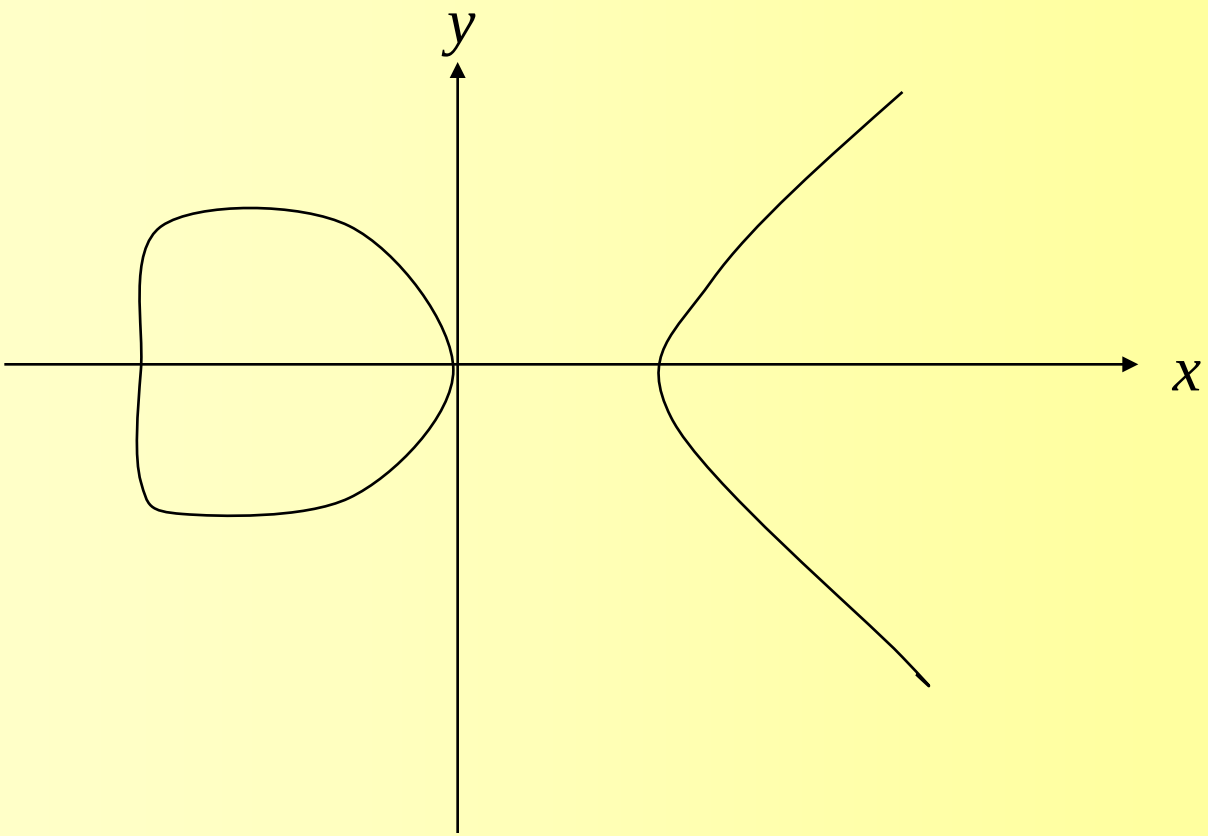
其中a、b∈R， $4a^2+27b^3\neq 0$。

- 设$f(x) = x^3+ax+b$，
  方程$f(x) =0$的判别式为： $\Delta = 4a^2+27b^3$
- 当判别式$\Delta=0$时，方程$f(x) =0$有一个二重零点x。显然$(x,0)$在E上。
  对于$E(x,y) = y^2-x^3+ax+b=0$，有:

$$\frac{\partial E}{\partial y} = 2y\big|_{(x,0)} = \frac{\partial E}{\partial x}\big|_{(x,0)} = 0$$

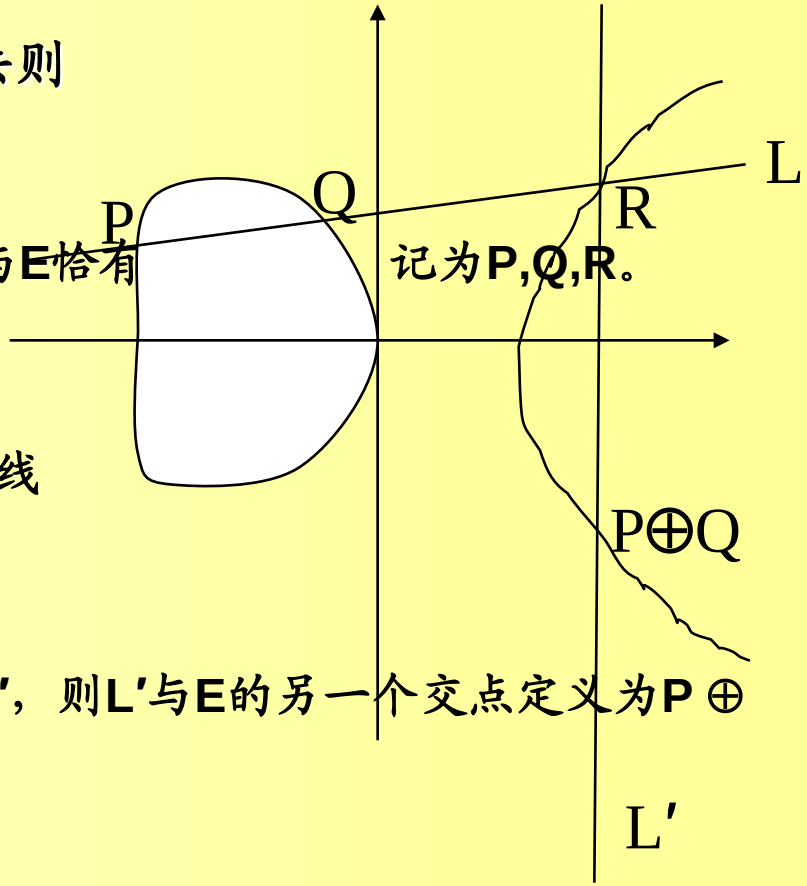
曲线在这点是个奇点，没有切线。$(x-\alpha)^2(x-\beta)$在α点的导数为0。

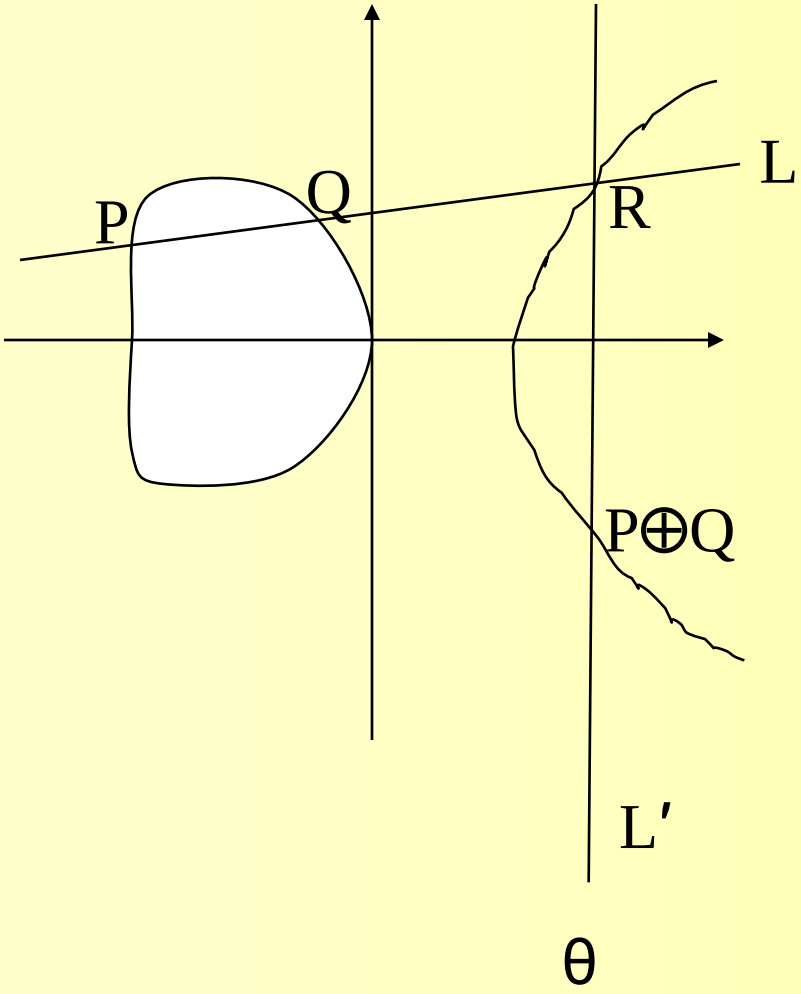
实域R上椭圆曲线

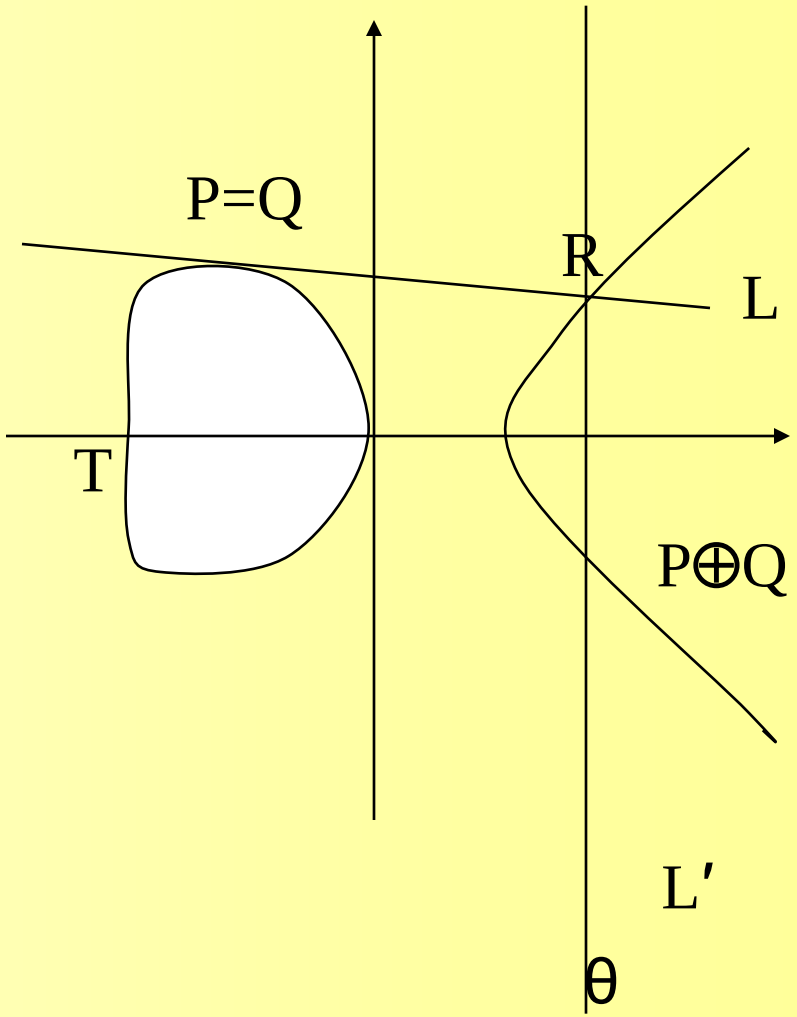


实域R上椭圆曲线

- 实域R上椭圆曲线的点的加法运算法则
  - 设L 为一条直线。
  - 因为E的方程是三次的，所以L可与E恰有 记为P,Q,R。
（如果L与E相切，那么P,Q,R可以不是相异的）
  - 按下述方式定义E上运算⊕
    - 设P,Q ∈ E，L为联接P,Q的直线
（若P=Q，则L取过P点的切线）；
    - 设R为L与E的另一个交点；
    - 再取连接R与无穷远点的直线L′，则L′与E的另一个交点定义为P ⊕ Q。




P
Q
R
L
P⊕Q
L′
θ


P=Q
R
L
T
P⊕Q
L′
θ

椭圆曲线点集E上的⊕法运算

- 设$P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)\in E$， $R(x_3,y_3)=P\oplus Q$，则

$$\lambda=\begin{cases}\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}, & \text{当} x_1\neq x_2\\ \dfrac{3x_1^2+a}{2y_1}, & \text{当} x_1=x_2 \text{且} y_1=y_2\neq 0\end{cases}$$

$$x_3=\lambda^2-x_1-x_2$$

$$y_3=\lambda(x_1-x_3)-y_1$$

- Poincaré 定理： $E(F_q, \oplus)$ **构成交换群。**
- Hasse定理： $|E(F_q)| = 1+q-t$，其中 $|t| \le 2 \cdot q^{1/2}$

有限域上椭圆曲线

- **F_p (素域，p为素数)上椭圆曲线**

  令p>3，a,b∈F_p，满足**$4a^3+27b^2\neq 0$**，由参数a和b定 义的F_p上的一个椭圆曲线方程为:

  $$y^2=x^3+a\cdot x+b$$

  它的所有解(x,y)，(x∈F_p，y∈F_p)，连同一个称为“无穷远 点”（记为θ）的元素组成的集合记为E(F_p)称为F_p上**椭圆曲线。**

$E(F_p)$ 的加法规则

I. $\theta \oplus \theta = \theta$ （单位元素）

II. $(x,y) \oplus \theta = (x,y)$，任给$(x,y) \in E(F_p)$

III. $(x,y) \oplus (x,-y) = \theta$，任给$(x,y) \in E(F_p)$，即点$(x,y)$的逆元为$(x,-y)$.

IV. 令$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$为$E(F_p)$中非互逆元，则

$(x_1,y_1) \oplus (x_2,y_2) = (x_3,y_3)$, 其中

$\alpha = (y_2-y_1) / (x_2-x_1)$

$x_3 = \alpha^2 - 2x_1$，$y_3 = \alpha(x_1-x_3)-y_1$

V. (倍点运算规则) 设$(x_1,y_1) \in E(F_p), y_1 \neq 0$，则

$2(x_1,y_1) = (x_3,y_3)$，其中

$x_3 = \alpha^2 - 2 \cdot x_1$，$y_3 = \alpha(x_1-x_3)-y_1$ $\alpha = (3x_1^2+a)/(2y_1)$

椭圆曲线密码体制 — 密钥的生成

I. 选取一个基域F_q，一个定义在上的椭圆曲线$E(F_q)$，和E上一个为素数阶n的点P。

II. 在区间[1,n-1]中随机选取一个整数d。

III. 计算点Q := $d \cdot P$ 。 (d个P相⊕)

IV. 公开密钥 —— $(E(F_q), P, n, Q)$。

V. 私钥为整数d。

椭圆曲线密码体制 — 加密与解密ECES

加密明文m

I. 查找公钥$(E(F_q),P,n,Q)$,
II. 将m表示成一个域元素$m \in F_q$,
III. 在区间[1, n-1]内选取一个随机数k,
IV. 依据公钥计算点 $(x_1,y_1):=k\cdot P$ (k个P相⊕)
V. 计算点$(x_2,y_2):=k\cdot Q$,如果$x_2=0$, 则回到第iii)步
VI. 计算$C:=m\cdot x_2$
VII. 密文 = (x_1,y_1,C)

隐藏因子的信息

隐藏因子

解密密文(x_1,y_1,C)

通过隐藏因子的信息计算隐藏因子

I. 使用私钥d，计算

$$d\cdot(x_1,y_1) = d\cdot k\cdot P = k\cdot d\cdot P = k\cdot Q = (x_2, y_2)$$

II. 计算F_q中x_2^{-1}
III. 计算$m = C\cdot x_2^{-1}$，恢复出明文数据m。

可以与ElGamel算法的步骤建立对应关系

椭圆曲线密码体制 — 签名与验证ECSA

对信息m签名

I. 将m表示成一个二进制串
II. 计算hash值 e= H(m);
III. 在区间**[1，n-1]**内选取一个随机数k,
IV. 计算点 (x_1,y_1)**:=k·P** (k个P相⊕)
V. 计算r=(x_1+e) mod q;
VI. **利用私钥*d*计算**
s=(k-d · r) mod *n*
VII. **签名(r, s) 。**

验证签名(r, s)

I. 查找公钥(E(Fq),P,n,Q),
II. 计算点 (x_1,y_1)=sP+rQ
III. 计算hash值 e= H(m);
IV. 计算R=(x_1+e) mod q;
V. 如果R=r，则接受签名。

sP+rQ = (k-dr) P+rdP
= kP- drP+rdP
= kP
= (x_1,y_1)

椭圆曲线离散对数问题 ECDLP

- 椭圆曲线上的离散对数问题：已知P, [m] P, 求 m，
- 椭圆曲线公钥算法的安全性基于椭圆曲线离散对数的难解性
- Hasse定理：$|E(F_q)| = 1+q-t$，其中$|t| \le 2 \cdot q^{1/2}$
- （椭圆曲线可能的阶）对于任意的素数p、满足$|t| \le 2p^{1/2}$的整数t，存在阶为**p+1-t**的域F_p上的椭圆曲线E。
- F_p上的椭圆曲线E的阶与p大体相当。

椭圆曲线离散对数问题 ECDLP

- 求解ECDP的最好的算法的时间复杂度**$O(q^{1/2})$**
- 在有限域中的离散对数算法的时间复杂度

$$sub\_exp(q)= \mathbf{exp(c\cdot(\log q)^{1/3}(\log\log q)^{2/3})}$$

- 显然， $O(q^{1/2})$要比sub_exp(q)增长快得多。
- 在ECDP中，令$q\approx 2^{160}$，抗强力搜索的难度是2^{80}.
- 为使有限域上离散对数问题获得的相似的难度， sub_exp(q)就需要q达到2^{1000}的数量级。
- 椭圆曲线上的离散对数问题比有限域上的离散对数问题更难处理。
- 可以在椭圆曲线公钥密码中以较小的密钥长度达到在有限域中更大的密钥长度同样的安全性。

实践题

- 实现RSA 算法
- 实现ElGamel算法
- 实现一个椭圆曲线算法

要求详细阐述算法中的数学运算实现原理。
例如在RSA算法中详细阐述幂模运算的方法，比较不同方法的性能。

- 讨论公开密钥算法的安全性